Appunti di elettromagnetismo

Andrea Biancalana

ottobre 1999

1 Magneti e correnti elettriche

Magneti: esistono materiali che manifestano interazioni non-gravitazionali e non-elettriche; caratteristica dei magneti: non è possibile isolarne la 'carica magnetica': si osservano solo *dipoli magnetici*.

Effetto della corrente elettrica che circola in un filo conduttore posto in prossimità di una bussola: se *ago e filo* sono *paralleli* (o meglio non-perpendicolari) allora si osserva una deviazione dell'ago quando si 'accende' la corrente.

Si possono facilmente osservare (per esempio esperimenti con la limatura di ferro) le linee di forza del campo magnetico generato da una calamita e anche quelle del campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente: in particolare si vede che il filo *non è sorgente* delle linee di forza che invece risultano essere linee chiuse circolari 'in asse' con il filo stesso.

Si può misurare la forza che agisce su un filo percorso da corrente e immerso in un campo magnetico uniforme: si osserva una F proporzionale all'intensità della corrente e alla lunghezza del filo; se la direzione del filo e la direzione delle linee di forza del campo magnetico sono perpendicolari:

$$F = B \cdot i \cdot l$$

se, più in generale, la direzione del filo e la direzione delle linee di forza del campo magnetico formano un angolo α la forza sul filo è:

$$F = B \cdot i \cdot l \cdot \sin(\alpha)$$

In ogni caso la forza risulta *perpendicolare* sia alla direzione delle linee del campo magnetico sia alla direzione della corrente.

La costante B può essere intesa come intensità (o modulo) del *vettore induzione magnetica* la cui direzione è data dalla direzione che assumerebbe, punto per punto, l'ago di una bussola.

Il vettore $\vec{B}$ rappresenta completamente il campo magnetico che, in generale, è una funzione delle coordinate: $\vec{B}(x, y, z)$.

Se con $\vec{l}$ si indica la lunghezza (orientata secondo il verso della corrente) del filo immerso nel campo magnetico $\vec{B}$ allora la forza misurata sul filo può essere espressa in forma vettoriale dalla:

$$\vec{F} = i \cdot \vec{l} \wedge \vec{B}$$

Interazione tra due fili percorsi da corrente: due fili di lunghezza l disposti parallelamente a distanza d e percorsi dalle correnti i_1e i_2 risentono di una forza reciproca attrattiva (se le correnti sono nello stesso verso) o repulsiva (se le correnti sono in versi opposti) di intensità:

$$F_{1,2} = k \frac{i_1 \cdot i_2}{d} l$$

dove la costante k dipende dal mezzo in cui i fili sono immersi.

Si definisce $k = \mu/2\pi$ dove μ è la permeabilità magnetica del mezzo (μ_0 indica la permeabilità magnetica del vuoto).

Se i due fili sono paralleli allora ognuno di essi è perpendicolare al campo magnetico generato dall'altro; la forza che agisce sul filo 1 è:

$$F_1 = i_1 \cdot l \cdot B_2$$

dove B_2 rappresenta l'intensità del campo magnetico generato dal filo 2;

confrontando le ultime due formule si ottiene allora (legge di Biot-Savart):

$$B_2 = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{i_2}{d}$$

che esprime l'intensità del campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente.

La legge di Biot–Savart in forma differenziale fornisce l'intensità del campo di induzione magnetica dovuto ad un 'piccolo elemento' di filo percorso dalla corrente i:

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I\Delta\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

In questa forma la legge di Biot–Savart può essere utilizzata per calcolare in modo semplice il campo di induzione magnetica al centro di una spira circolare di raggio r:

$$B_{centro} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{r}$$

Può essere dimostrata la validità generale del teorema della *circuitazione* di Ampère verificabile in modo semplice nel caso del campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente:
la circuitazione dell'induzione magnetica $\vec{B}$, calcolata lungo una qualsiasi linea chiusa, è uguale al prodotto $\mu_0 I$ della permeabilità magnetica e della corrente complessiva *concatenata* con la linea.

Il teorema della circuitazione può essere usato per calcolare in modo semplice, con l'aiuto di considerazioni sulla simmetria del sistema, il campo $\vec{B}$ all'interno di un solenoide di n spire per unità di lunghezza:

$$B = \mu_0 n I$$

Considerando la formula che fornisce la forza agente su un filo rettilineo percorso da corrente è possibile calcolare il momento torcente esercitato su un spira rettangolare percorsa da corrente I e immersa in un campo di induzione magnetica B uniforme:

$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

dove $\vec{m} = I\vec{S}$ rappresenta il *momento magnetico* della spira e $\vec{S}$ ha modulo uguale all'area della superficie della spira e direzione *perpendicolare* al piano della spira. Questa formula ha validità generale indipendentemente dalla forma della spira.
Applicazioni: amperometro e volmetro a bobina mobile.

Il campo di induzione magnetica di una spira percorsa da corrente è uguale a quello di un dipolo magnetico (come quello di una piccola barretta magnetizzata) caratterizzato da un momento magnetico di intensità $I\,S$.

Ipotesi di Ampère: il campo magnetico dei magneti permanenti è generato da anelli di corrente microscopici (a livello atomico) orientati in modo anisotropo (cioè disordinato, senza direzioni privilegiate).

Momenti magnetici atomici e molecolari (orbitali e di spin) sono effettivamente associati al movimento di rotazione e di rivoluzione degli elettroni nel modello planetario dell'atomo.

2 Forza di Lorentz

Una corrente elettrica in un conduttore metallico è dovuta al *movimento* di elettroni di conduzione: se N indica il numero di elettroni che si trovano in un tratto di filo conduttore rettilineo, di lunghezza $\Delta\vec{l}$, immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ la forza

$$\vec{F} = i\Delta\vec{l} \wedge \vec{B}$$

può essere riscritta nella forma:

$$\vec{F} = -Ne\vec{v}_d \wedge \vec{B}$$

perché:

$$i = \frac{Q}{\Delta t} = -\frac{Ne}{\Delta t}$$

e:

$$\vec{v}_d = \frac{\Delta\vec{l}}{\Delta t}$$

rappresenta la *velocità di deriva* degli elettroni di conduzione.

La forza magnetica che agisce sul filo agisce, in realtà, sulle cariche che si muovono dentro il filo: poiché nel tratto di filo considerato sono presenti N elettroni la forza che agisce sul singolo elettrone è:

$$\vec{f} = -e\vec{v}_d \wedge \vec{B}$$

In generale: una carica elettrica q che si muove in presenza di un campo elettrico $\vec{E}$ e di un campo magnetico $\vec{B}$ è soggetta ad una forza (di Lorentz):

$$\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Carica elettrica in moto in campo magnetico (in assenza di campo elettrico):

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

La forza è perpendicolare alla velocità e quindi il moto è circolare uniforme; l'accelerazione è v^2/r essendo r il raggio di curvatura dell'*orbita* e quindi:

$$qvB = m\frac{v^2}{r}$$

Il raggio di curvatura dell'orbita è:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Il periodo del moto circolare (indipendente dalla velocità !) è:

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Selettore di velocità: la combinazione di un campo elettrico e un campo magnetico reciprocamente ortogonali e ortogonali alla velocità di un beam di particelle cariche libere permette di selezionare quelle la cui velocità soddisfa la relazione:

$$qE = qvB$$

per le quali non si avrà deflessione.

Spettrografo di massa: poiché il raggio di curvatura per il moto di una particella in un campo magnetico è *proporzionale* alla massa della particella è possibile (una volta selezionata la velocità) misurare indirettamente la massa di ioni misurando il raggio di curvatura delle loro orbite.

Ciclotrone: una particella elettricamente carica *non può* essere accelerata per mezzo di campi magnetici (ché agiscono con forze sempre perpendicolari alla velocità); nel ciclotrone si forzano le particelle cariche su orbite circolari (per mezzo di un campo magnetico) e si compie l'accelerazione per mezzo di un campo elettrico alternato opportunamente disposto (elettrodi a ‘D’) che cambia polarità con periodo doppio di $T = 2\pi m/(qB)$

Effetto Hall: la forza di Lorentz agisce comunque su cariche elettriche in movimento in un campo magnetico; quindi agisce anche sugli elettroni di conduzione di un metallo (percorso da corrente) immerso in un campo magnetico; l’effetto è quello di una *deviazione* della corrente all’interno del metallo e, quindi, dell’insorgere di una d.d.p. *trasversale* alla direzione della corrente:

$$V_{\mathrm{Hall}} = v_d B d$$

essendo v_d la velocità di deriva degli elettroni di conduzione e d lo spessore del conduttore.

3 Induzione elettro-magnetica

Esperienze di Faraday: se le correnti elettriche producono campi magnetici *allora* campi magnetici producono correnti elettriche ?
Faraday dimostrò sperimentalmente che la risposta è negativa; invece la *variazione nel tempo* di campi magnetici può indurre correnti elettriche.

Legge di Faraday–Neumann: in una spira (o comunque in un circuito chiuso) viene indotta una *forza elettromotrice* proporzionale alla *velocità di variazione* del flusso $\Phi(B)$ del campo magnetico concatenato:

$$f_{el.mot.} = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

Il segno negativo nella espressione della legge di Faraday–Neumann è una manifestazione della tendenza generale dei sistemi ad opporsi ai cambiamenti; tale tendenza, in questo contesto, viene espressa dalla *legge di Lenz*:
il circuito reagisce *opponendosi alla sollecitazione*; la corrente indotta ha verso tale che il campo magnetico da essa generato è diretto in modo da compensare la variazione del flusso del campo magnetico esterno.

Nel caso di una spira (o di un solenoide) il flusso del campo magnetico è:

$$\Phi(B) = BS\cos(\theta)$$

dove S indica l’area della superficie della spira e θ l’angolo tra $\vec{B}$ e la perpendicolare alla superficie della spira. Una variazione (nel tempo) di Φ può essere prodotta per mezzo di una variazione (nel tempo) : del intensità B (per es. trasformatori);
dell’area S;
dell’angolo θ (per es. alternatori e dinamo).

4 Circuiti in corrente alternata

Autoinduzione: un circuito percorso da corrente genera un campo magnetico il cui flusso è *autoconcatenato* (cioè concatenato con il circuito stesso); il flusso autoconcatenato è:

$$\Phi = Li$$

dove L è l'induttanza del circuito e dipende *solo* dalla geometria e dalle caratteristiche costruttive del circuito stesso.

Una variazione di corrente in un circuito di induttanza L produce una forza elettro–motrice auto–indotta:

$$f_{el.mot.} = -L\frac{di}{dt}$$

In particolare si spiega in questi termini il fenomeno dell'extracorrente di apertura e di chiusura di un circuito.

In un circuito RL alimentato da una tensione V si ottiene la seguente relazione tra corrente e tensione:

$$V - L\frac{di}{dt} = Ri$$

Moltiplicando i termini di questa equazione per idt e integrando si ottiene il valore dell'energia fornita dal generatore; essa è in parte dissipata per effetto Joule e in parte accumulata come *energia della corrente*; infatti:

$$V i\,dt = Ri^2\,dt + Li\frac{di}{dt}dt$$

$$\int V i\,dt = \int Ri^2\,dt + \int Li\frac{di}{dt}dt$$

$$E_{generatore} = E_{joule} + \int Li\,di$$

E l'ultimo termine è:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}Li^2$$

Energia del campo magnetico: l'energia accumulata dal circuito percorso da corrente può essere intesa come energia accumulata dal campo magnetico; dalla espressione del campo B di un solenoide (funzione della corrente i) si deduce l'espressione generale della densità di energia del campo magnetico:

$$W = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

dove $\mathcal{V}$ indica il volume.